Početní část 1 - 17.6.2021

1. Jedná se o rovnici v separovaných proměnných $y' = f(x)g(y)$, kde $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$ a $g(y) = \sqrt[3]{y}$. Potom

   (a) $D_f = \mathbb{R}$.

   (b) $D_g \setminus M = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $M := \{y : \ g(y) = 0\}$. Položme $J_1 = (-\infty, 0), J_2 = (0, +\infty)$.

   (c) Stacionární řešení je $y = 0$.

   (d)
   $$F(x) = \int x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + c,\ c \in \mathbb{R},$$
   $$G(y) = \int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt[3]{y}} = \frac{3}{2}y^{\frac{2}{3}},\ y \neq 0.$$

   Obor hodnot G na J_1 i J_2 je $(0, +\infty)$.

   (e) Pro $J = J_1$ a $c \in \mathbb{R}$ máme
   $$\{x \in \mathbb{R} :\ F(x) + c \in G(J_1) = (0, +\infty)\} =$$
   $$\begin{cases} \mathbb{R},\ c > -\frac{1}{3}, \\ \Big(-\infty, -\sqrt{\sqrt[3]{9c^2} - 1}\Big) \cup \Big(\sqrt{\sqrt[3]{9c^2} - 1}, +\infty\Big),\ c \leq -\frac{1}{3}, \end{cases}$$

   jelikož $\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + c > 0$ pro $c > -\frac{1}{3}, x \in \mathbb{R}$; zatímco pro $c \leq -\frac{1}{3}$ platí
   $$\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + c > 0 \Leftrightarrow x^2 > (-3c)^{\frac{2}{3}} - 1 \Leftrightarrow |x| > \sqrt{\sqrt[3]{9c^2} - 1}.$$

   Řešení je tedy
   $$y(x) = G^{-1}(F(x) + c) = -\left(\frac{2}{9}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}c\right)^{\frac{3}{2}}.$$

   Pro $J = J_2$ a $c \in \mathbb{R}$ je výpočet zcela analogický. Dostaneme řešení
   $$y(x) = G^{-1}(F(x) + c) = \left(\frac{2}{9}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}c\right)^{\frac{3}{2}}$$

   na stejném definičním oboru jako výše.

(f) Maximální řešení jsou tvaru

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \pm\left(\frac{2}{9}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}c\right)^{\frac{3}{2}}, \qquad x\in\mathbb{R},\ c\geq -\frac{1}{3},\\
y(x) &= 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x\in\mathbb{R},\\
y(x) &= \begin{cases} 0; & x\leq\sqrt{\sqrt[3]{9c^2}-1},\\ \pm\left(\frac{2}{9}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}c\right)^{\frac{3}{2}}, & x>\sqrt{\sqrt[3]{9c^2}-1},\ c<-\frac{1}{3},\end{cases}\\
y(x) &= \begin{cases} \pm\left(\frac{2}{9}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}c\right)^{\frac{3}{2}}, & x<-\sqrt{\sqrt[3]{9c^2}-1},\ c<-\frac{1}{3},\\ 0; & x\geq-\sqrt{\sqrt[3]{9c^2}-1},\end{cases}\\
y(x) &= \begin{cases} \pm\left(\frac{2}{9}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}c_1\right)^{\frac{3}{2}}, & x<-\sqrt{\sqrt[3]{9c_1^2}-1},\ c_1<-\frac{1}{3},\\ 0; & x\in[-\sqrt{\sqrt[3]{9c_1^2}-1},\sqrt{\sqrt[3]{9c_2^2}-1}],\\ \pm\left(\frac{2}{9}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}c_2\right)^{\frac{3}{2}}, & x>\sqrt{\sqrt[3]{9c_2^2}-1},\ c_2<-\frac{1}{3},\end{cases}
\end{aligned}
$$

kde jsme použili lemma o nalepování řešení. V poslední možnosti jsou znaménka na sobě zcela nezávislá.

(g) Pro počáteční podmínku $y(\sqrt{3})=1$ dostaneme rovnost

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{2}{9}(1+(\sqrt{3})^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}c\right)^{\frac{3}{2}} &= 1\\
\frac{2}{9}8+\frac{2}{3}c &= 1\\
c &= -\frac{7}{6}.
\end{aligned}
$$

Tudíž maximální řešení splňující počáteční podmínku je například

$$
y(x)=\begin{cases} 0; & 0<x\leq\sqrt{\sqrt[3]{4.7^2}-1},\\ \pm\left(\frac{2}{9}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{7}{9}\right)^{\frac{3}{2}}, & x>\sqrt{\sqrt[3]{4.7^2}-1}.\end{cases}
$$

2. Máme

$$\sin\left(\pi(n+\tfrac{1}{n})\right) = \sin(n\pi + \pi/n) = \sin(\pi/n)\cos(n\pi) = (-1)^n \sin(\pi/n).$$

Tudíž

$$\left|\frac{\sin\left(\pi \frac{n^2+1}{n}\right)}{\ln^\alpha n}\right| = \frac{\sin(\pi/n)}{\ln^\alpha n} \cong \frac{\pi/n}{\ln^\alpha n},\ n \to +\infty.$$

Posloupnost $\{n \ln^\alpha n\}_{n=1}^{+\infty}$ je pro α pevné od jistého indexu rostoucí, neboť

$$(x \ln^\alpha x)' = \ln^\alpha x - \alpha \ln^{\alpha-1} x = \ln^{\alpha-1} x(\ln x - \alpha) > 0$$

pro $x > e^\alpha$. Z integrálního kritéria vidíme, že

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln^\alpha n} < +\infty \Leftrightarrow \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^\alpha x} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dy}{y^\alpha} < +\infty.$$

Poslední integrál konverguje právě tehdy, když $\alpha > 1$. Tedy řada konverguje absolutně pro $\alpha > 1$ a jinak nekonverguje absolutně.

Zbývá rozhodnout o konvergenci řady. Platí $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{\pi}{n} + O(n^{-3}),\ n \to +\infty$. Tudíž

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\ln^\alpha n} = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\pi}{n \ln^\alpha n} + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n,$$

kde řada úplně napravo je absolutně konvergentní pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$. Už víme, že posloupnost $\{\frac{1}{n \ln^\alpha n}\}_{n=1}^{+\infty}$ je klesající od jistého indexu s limitou nula pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$. Z Leibnizova kritéria tedy plyne konvergence řady

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln^\alpha n}.$$

Tudíž řada konverguje pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$.